CONTINUIDAD EN $\mathbb{R}^n$

JORGE A. GUCCIONE AND JUAN J. GUCCIONE

Contents

1 Límite de funciones

Fijemos $m, n \in \mathbb{N}$ y consideremos a $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ provistos de métricas que denotaremos con d. Consideremos una función $f\colon X \to \mathbb{R}^n$, definida en un subconjunto X de $\mathbb{R}^m$ y fijemos un punto de acumulación a de X. Decimos que $b \in \mathbb{R}^n$ es un *límite de f cuando x tiende a a* y escribimos $\lim_{x\to a} f = b$, si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que

$$d(f(x), b) < \epsilon \text{ para todo } x \in X \text{ tal que } 0 < d(x,a) < \delta.$$

En otras palabras, si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que $f\bigl(\mathrm{B}_\delta(a) \cap (X \setminus \{a\})\bigr) \subseteq \mathrm{B}_\epsilon(b)$.

El siguiente teorema dice que el límite de una función, si existe, es único.

Theorem 1.1. *Si $b = \lim_{x\to a} f(x)$ y $c = \lim_{x\to a} f(x)$, entonces $c = b$.*

Proof. Supongamos que $\lim_{x\to a} f(x) = b$ y que $c \neq b$ en $\mathbb{R}^n$. Tomemos $\epsilon := d(c,b)/2$. Por definición existe $\delta > 0$ tal que $d(f(x), b) < \epsilon$, para todo $x \in X$ tal que $0 < d(x,a) < \delta$. En consecuencia $d(f(x), c) > \epsilon$, para todo $x \in X$ tal que $0 < d(x,a) < \delta$, ya que si $d(f(x), c) \leq \epsilon$ para algún $x \in X$ tal que $0 < d(x,a) < \delta$, entonces $d(c,b) \leq d(c, f(x)) + d(f(x), b) < 2\epsilon = d(c,b)$. Dado que $\{x \in X : 0 < d(x,a) < \epsilon\} \neq \emptyset$, obtenemos en particular que c no es un límite de f cuando x tiende a a. □

Theorem 1.2. *Supongamos que $Y \subseteq X$ es tal que $a \in Y'$ y denotemos con g a la restricción de f a Y. Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$, entonces $\lim_{x\to a} g(x) = b$.*

Proof. Es evidente. □

El siguiente resultado dice que la existencia y el valor del límite sólo depende del comportamiento de f en un entorno de a.

Theorem 1.3. *Escribamos $Y := V \cap X$ donde V es un entorno de a y denotemos con g a la restricción de f a Y. Entonces $a \in Y'$ y $\lim_{x\to a} g(x) = b$ si y sólo si $\lim_{x\to a} f(x) = b$.*

Proof. Es evidente. □

Theorem 1.4. *Si existe $\lim_{x\to a} f(x)$, entonces f es acotada en un entorno de a.*

Proof. Denotemos con b a $\lim_{x\to a} f(x)$. Por hipótesis existe $\delta > 0$ tal que $d(f(x), b) < 1$ para todo $x \in X$ tal que $0 < d(x,a) < \delta$. En otras palabras $f(X \cap (\mathrm{B}_\delta(a) \setminus \{a\})) \subseteq \mathrm{B}_1(b)$. □

Theorem 1.5. *Si existe* $\lim_{x\to a} f(x)$ *y es distinto de cero, entonces existe un entorno* V *de* a *tal que* $f(x) \neq 0$ *para todo* $x \in X \cap (V \setminus a)$.

Proof. Denotemos con b a $\lim_{x\to a} f(x)$. Por hipótesis existe $\delta > 0$ tal que $d(f(x), b) < d(0, b)$, para todo $x \in X$ tal que $0 < d(x, a) < \delta$. Así $f(x) \neq 0$ para todo $x \in X \cap (\mathrm{B}_\delta(a) \setminus a)$. □

Theorem 1.6. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) $\lim_{x\to a} f(x) = b$.
(2) *Para todo entorno* U *de* b *hay un entorno* V *de* a *tal que* $f(X \cap (V \setminus \{a\})) \subseteq U$.
(3) *Si* $(x_r)_{r\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de puntos de* $X\setminus\{a\}$ *que tiende a* a*, entonces* $\lim_{r\to\infty} f(x_r) = b$.

Proof. (1) ⇒ (2) Por hipótesis, dado $\epsilon > 0$ tal que $\mathrm{B}_\epsilon(f(a)) \subseteq U$, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(X \cap (\mathrm{B}_\delta(a) \setminus \{a\})) \subseteq \mathrm{B}_\epsilon(f(a)) \subseteq U.$$

Así que podemos tomar $V = \mathrm{B}_\delta(a)$.

(2) ⇒ (3) Dado $\epsilon > 0$ tomemos un entorno V de x tal que $f(X \cap (V \setminus \{a\})) \subseteq \mathrm{B}_\epsilon(f(a))$. Si r_0 es tal que $x_r \in V \cap X$ siempre que $r \geq r_0$, entonces $f(x_r) \in \mathrm{B}_\epsilon(f(a))$ siempre que $r \geq r_0$.

(3) ⇒ (1) Si f no convergiera a b cuando x tiende a a, existiría $\epsilon > 0$ tal que para cada $r \in \mathbb{N}$ podríamos encontrar $x_r \in X \cap (\mathrm{B}_{1/r}(a) \setminus \{a\})$ tal que $d(f(x_r), b) > \epsilon$. La sucesión $(x_r)_{r\in\mathbb{N}}$ tendería a a, pero la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ no tendería a b. □

Corollary 1.7. *Para que* $\lim_{x\to a} f(x)$ *exista es necesario que, para toda sucesión* $(x_r)_{r\in\mathbb{N}}$ *de puntos de* $X \setminus \{a\}$ *tal que* $\lim_{r\to\infty} x_r = a$*, exista* $\lim_{r\to\infty} f(x_r)$*, y que este límite sea independiente de* $(x_r)_{r\in\mathbb{N}}$.

Corollary 1.8. *Para que* $\lim_{x\to a} f(x)$ *exista es suficiente que exista* $\lim_{r\to\infty} f(x_r)$*, para todo sucesión* $(x_r)_{r\in\mathbb{N}}$ *de puntos de* $X \setminus \{a\}$ *tal que* $\lim_{r\to\infty} x_r = a$.

Proof. En efecto no pueden existir b y c distintos en $\mathbb{R}^n$ y sucesiones $(x_r)_{r\in\mathbb{R}}$ e $(y_r)_{r\in\mathbb{R}}$, de puntos de $X \setminus \{a\}$, tales que $\lim_{r\to\infty} x_r = \lim_{r\to\infty} y_r = a$, $\lim_{r\to\infty} f(x_r) = b$ y $\lim_{r\to\infty} f(y_r) = c$, pues entonces la sucesión $(z_r)_{r\in\mathbb{N}}$, definida por $z_{2r-1} := x_r$ y $z_{2r} := y_r$, estaría formada por puntos de $X \setminus \{a\}$, convergería a a, pero $(f(z_r))_{r\in\mathbb{N}}$ no convergería. □

Remark 1.9. Si las métricas de $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ que estamos usando provienen de normas, entonces podemos reemplazarlas por normas equivalentes a ellas, sin que varíen ni el conjunto de puntos acumulación de X, ni el conjunto de funciones que convergen cuando x tiende a un punto de acumulación determinado a de X, ni el valor al que estas funciones convergen.

Proposition 1.10. *Si la métrica de* $\mathbb{R}^n$ *proviene de una norma* $\|\ \|$*, entonces las siguientes afirmaciones valen:*

(1) *Supongamos que* $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ *e* $g\colon X \to \mathbb{R}^n$ *son funciones que convergen cuando* x *tiende a* a*. Entonces* $f + g$ *converge cuando* x *tiende a* a *y* $\lim_{x\to a}(f + g)(x) = b + c$*, donde* $b := \lim_{x\to a} f(x)$ *y* $:= \lim_{x\to a} f(x)$
(2) *Supongamos que* $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ *es una función que converge cuando* x *tiende a* a*. Entonces, para cada* $\lambda \in \mathbb{R}$*, la función* λf *converge cuando* x *tiende a* a *y* $\lim_{x\to a} \lambda f(x) = \lambda b$*, donde* $b := \lim_{x\to a} f(x)$.

Proof. 1) Por hipótesis dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|f(x) - b\| < \epsilon/2$ y $\|g(x) - c\| < \epsilon/2$ para todo $x \in X$ tal que $0 < d(x, a) < \delta$. En consecuencia, para estos x's

$$\|f(x) + g(x) - b - c\| \leq \|f(x) - b\| + \|g(x) - c\| < \epsilon.$$

Por lo tanto $f + g$ tiende $b + c$ cuando x tiende a a.

2) Tomemos $\epsilon > 0$ arbitrario. Por hipótesis existe $\delta > 0$ tal que $\|f(x) - b\| < \epsilon$ para todo $x \in X$ tal que $0 < d(x, a) < \delta$. En consecuencia, para estos x's

$$\|\lambda f(x) - \lambda b\| = |\lambda|\|f(x) - b\| < |\lambda|\epsilon.$$

Por lo tanto λf tiende λb cuando x tiende a a. □

1.0.1 Limites laterales

Supongamos que $X \subseteq \mathbb{R}$ (es decir que $m = 1$). Recordemos que $a \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulación a derecha de X si es un punto de acumulación de $X \cap [x, +\infty)$. Supongamos que a es un punto de acumulación a derecha de X. Decimos que el *límite a derecha* de una función $f\colon X \to \mathbb{R}$ en a existe y es $b \in \mathbb{R}^n$, si la restricción de f a $X \cap [a, +\infty)$ converge a b en a. En este caso escribimos $b = \lim_{x\to a^+} f(x)$. Por supuesto que si $a \in X'_+$ y el límite de f en a existe, entonces también existe el límite a derecha de f en a y $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a} f(x)$. Por la misma definición valen teoremas análogos a los Teoremas 1.1, 1.2 y 1.3. Por supuesto que en el Teorema 1.2 hay que pedir que a sea un punto de acumulación a derecha de Y. También vale un análogo del Teorema 1.4, pero en él sólo se prueba que existe $\delta > 0$ tal que f es acotada en $X \cap [a, \delta)$. Por último hay análogos del Teorema 1.6, de los Corolarios 1.7 y 1.8, y de la Proposición 1.10. Por supuesto que las sucesiones mencionadas en los enunciados de los tres primeros resultados, deben estar formadas por puntos que estén a la derecha de a. Dejamos al lector la tarea de completar los detalles. Supongamos ahora que a es un punto de acumulación a izquierda de X. Decimos que el *límite a izquierda* de una función $f\colon X \to \mathbb{R}$ en a existe y es $b \in \mathbb{R}^n$, si la restricción de f a $X \cap (-\infty, a]$ converge a b en a. En este caso escribimos $b = \lim_{x\to a^-} f(x)$. Por supuesto que existen resultados análogos a los mencionados arriba para el caso de límite a derecha. Si $a \in X'_+$ pero $a \notin X'_-$, entonces de la existencia del límite a derecha de f en a se sigue la existencia del límite de f en a y, similarmente, si $a \in X'_-$ pero $a \notin X'_+$, entonces de la existencia del límite a izquierda de f en a, se sigue la del límite de f en a. Finalmente si a es un punto de acumulación bilateral de X, entonces el límite de f en a existe si y sólo si existen los límites laterales de f en a y además coinciden.

Example 1.11. Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

entonces $\lim_{x\to a^-} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a^+} f(x) = 1$.

2 Funciones continuas

Fijemos $m, n \in \mathbb{N}$ y consideremos a $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ provistos de métricas que denotaremos con d. Consideremos una función $f\colon X \to \mathbb{R}^n$, definida en un subconjunto X de $\mathbb{R}^m$ y fijemos un punto a de X. Decimos que f es *continua en* a si, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que

$$d(f(x), f(a)) < \epsilon \text{ para todo } x \in X \text{ tal que } d(x, a) < \delta.$$

En otras palabras, si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que $f(\mathrm{B}_\delta(a) \cap X) \subseteq \mathrm{B}_\epsilon(f(a))$.

Remark 2.1. Vale lo siguiente:

(1) Si a es un punto aislado de X, entonces toda función $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ es continua en a. En efecto en la definición, basta tomar δ tal que $\mathrm{B}_\delta(a) \cap X = \{a\}$.

(2) Si $a \in X \cap X'$, entonces $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ es continua en a si y sólo si $f(x)$ converge a $f(a)$ cuando x tiende a a. En efecto, esto es consecuencia inmediata de la definición de límite.

(3) Si Y es un subconjunto de X que contiene a a y $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ es continua en a, entonces la restricción de f a Y también es continua en a.
(4) Si $Y = V \cap X$, donde V es un entorno de a subconjunto de X que contiene a a y la restricción de $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ a Y es continua en a, entonces f es continua en a.

Proposition 2.2. *Para cada función $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ y cada $a \in X$ son equivalentes:*
(1) *f es continua en a.*
(2) *Para todo entorno U de $f(a)$ hay un entorno V de a tal que $f(V \cap X) \subseteq U$.*
(3) *$f^{-1}(U)$ es un entorno de a relativo a X, para cada entorno U de $f(a)$.*
(4) *$(f(x_r))_{r\in\mathbb{N}}$ tiende a $f(a)$, para cada sucesión $(x_r)_{r\in\mathbb{N}}$ de puntos de X, que tiende a a.*

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2) Por hipótesis, dado $\epsilon > 0$ tal que $\mathrm{B}_\epsilon(f(a)) \subseteq U$, existe $\delta > 0$ tal que
$$f(\mathrm{B}_\delta(a) \cap X) \subseteq \mathrm{B}_\epsilon(f(a)) \subseteq U.$$
Así que podemos tomar $V = \mathrm{B}_\delta(a)$.
(2) $\Rightarrow$ (3) Por hipótesis existe un entorno V de a tal que $f(V \cap X) \subseteq U$. Como $f^{-1}(U) \supseteq V \cap X$, esto prueba que $f^{-1}(U)$ es un entorno de a relativo a X.
(3) $\Rightarrow$ (4) Para cada $\epsilon > 0$, la preimagen $f^{-1}(\mathrm{B}_\epsilon(f(a)))$, de $\mathrm{B}_\epsilon(f(a))$, es un entorno de a relativo a X. Por lo tanto existe $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_r \in f^{-1}(\mathrm{B}_\epsilon(f(a)))$ para todo $r \geq r_0$. En consecuencia
$$f(x_r) \in f\big(f^{-1}(\mathrm{B}_\epsilon(f(a)))\big) \subseteq \mathrm{B}_\epsilon(f(a)),$$
para todo $r \geq r_0$, de modo que $(f(x_r))_{r\in\mathbb{N}}$ tiende a $f(a)$.
(4) $\Rightarrow$ (1) Si f no fuera continua en a, existiría $\epsilon > 0$ tal que para cada $r \in \mathbb{N}$ podríamos encontrar $x_r \in \mathrm{B}_{1/r}(a) \cap X$ tal que $d(f(x_r), f(a)) > \epsilon$. La sucesión $(x_r)_{r\in\mathbb{N}}$ tendería a a, pero la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ no tendería a $f(a)$. □

Remark 2.3. Si las métricas de $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ que estamos usando provienen de normas, entonces podemos reemplazarlas por normas equivalentes a ellas, sin que varíe el conjunto de funciones que son continuas en un punto a fijo de X.

Consideremos una función $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ y un subconjunto A de X. Decimos que f es *continua en A* si lo es en cada punto a de A. Finalmete si f es continua en X, decimos simplemente que f es continua.

Theorem 2.4. *Para cada función $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ son equivalentes:*
(1) *f es continua.*
(2) *$f^{-1}(U)$ es abierto relativo a X para cada subconjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$.*
(3) *$f^{-1}(C)$ es cerrado relativo a X para cada subconjunto cerrado C de $\mathbb{R}^n$.*
(4) *$f(\overline{B} \cap X) \subseteq \overline{f(B)}$ para cada $B \subseteq X$.*

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2) Por la equivalencia entre los items (1) y (3) de la proposición anterior, $f^{-1}(U)$ es un entorno relativo a X de cada uno de sus puntos. Así $f^{-1}(U)$ es un abierto relativo a X.
(2) $\Rightarrow$ (1) Tomemos $a \in X$ arbitrario un entorno abierto U de $f(a)$. Por hipótesis $f^{-1}(U)$ es un entorno abierto de a. Como a es arbitrario se sigue de la equivalencia entre los items (1) y (3) de la proposición anterior que f es continua.
(2) $\Rightarrow$ (3) Si C es un cerrado de $\mathbb{R}^n$, entonces $f^{-1}(C)$ es un cerrado relativo a X, porque
$$f^{-1}(C) = X \setminus f^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus C)$$
y, por hipótesis, $f^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus C)$ es abierto relativo a X.
(3) $\Rightarrow$ (2) Si U es un abierto de $\mathbb{R}^n$, entonces $f^{-1}(U)$ es un abierto relativo a X, porque
$$f^{-1}(U) = X \setminus f^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus U)$$

y, por hipótesis, $f^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus U)$ es cerrado relativo a X.

(3) $\Rightarrow$ (4) Debido a que $B \subseteq f^{-1}\big(\overline{f(B)}\big)$ y a que $f^{-1}\big(\overline{f(B)}\big)$ es cerrado relativo a X, necesariamente $\overline{B} \cap X \subseteq f^{-1}\big(\overline{f(B)}\big)$. Por lo tanto $f(\overline{B} \cap X) \subseteq \overline{f(B)}$.

(4) $\Rightarrow$ (3) Tomemos un cerrado arbitrario C de $\mathbb{R}^n$. Por hipótesis

$$f(\overline{f^{-1}(C)} \cap X) \subseteq \overline{f(f^{-1}(C))} \subseteq \overline{C} = C$$

y, en consecuencia, $\overline{f^{-1}(C)} \cap X \subseteq f^{-1}(C)$, lo que prueba que $f^{-1}(C)$ es cerrado relativo a X. $\square$

Example 2.5. Una función $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ es Lipschitziana si existe $k > 0$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y) \qquad \text{para todo } x, y \in X.$$

A cualquier k que satisface la desigualdad anterior se lo denomina una *constante de Lipschitz*. Es evidente que toda función Lipschitziana es continua (dado $\epsilon > 0$ basta tomas $\delta = \epsilon/k$).

Remark 2.6. Si las métricas de $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ que estamos usando provienen de normas, entonces podemos reemplazarlas por normas equivalentes a ellas, sin que varíe el conjunto de funciones Lipschitzianas. Por supuesto que si cambian las constantes de Lipschitz.

Example 2.7. Si la métrica de $\mathbb{R}^n$ proviene de una norma $\|\ \|$ arbitraria y la métrica de $\mathbb{R}^m$ proviene de la norma $\|\ \|_1$, entonces toda transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es Lipschitziana con constante de Lipschitz $A \coloneqq \max\{\|T(e_1)\|_1, \dots, \|T(e_m)\|_1\}$, donde $\{e_1, \dots, e_m\}$ denota a la base canónica de $\mathbb{R}^m$. Como T es lineal

$$\|T(x)\| = \left\| T\left(\sum_{i=1}^m x_i e_i\right) \right\| = \sum_{i=1}^m |x_i| \|T(e_i)\| \leq A \sum_{i=1}^m |x_i| = A\|x\|_1,$$

para todo $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^n$. En consecuencia

$$d(T(x), T(y)) = \|T(x) - T(y)\| = \|T(x - y)\| \leq A\|x - y\|_1 = A d_1(x, y),$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^m$.

Example 2.8. Un caso particular del ejemplo anterior es de la proyección canónica $\pi_i\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, definida por $\pi_i(x) = x_i$, donde i denota a un entero que satisface $1 \leq i \leq m$ y x_i denota a la i-ésima coordenada de x. En este caso podemos tomar a 1 como constante de Lipschitz.

Example 2.9. Consideremos a $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^n$ con las métricas que provienen de la norma $\|\ \|_1$ (donde identificamos $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ con $\mathbb{R}^{2n}$ de la manera obvia). La función suma $s\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definida por $s(x, y) \coloneqq x + y$, es Lipschitziana con constante de Lipschitz 1. En efecto

$$d(s(x,y), s(x',y')) = \|x+y-x'-y'\|_1 = \|x-x'+y-y'\|_1 = \|x-x'\|_1 + \|y-y'\|_1 = \|(x,y)-(x',y')\|_1,$$

para todo (x, y) y (x', y') en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. En realidad s es una función lineal, por lo que este ejemplo es un caso particular del Ejemplo 2.7.

Example 2.10. Consideremos a $\mathbb{R}^n$ provisto de una métrica proviniente de una norma $\|\ \|$. La función $\|\ \|\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es Lipschitziana con constante de Lipschitz 1. En efecto, esto se sigue de que

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\| \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{2.1}$$

Example 2.11. Dada una métrica d definida en $\mathbb{R}^n$, definamos la métrica d' en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ por

$$d'((x', y'), (x, y)) = d(x', x) + d(y', y).$$

Con esta definición, la función distancia $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, es Lipschitziana con constante de Lipschitz 1. En efecto, debido a la desigualdad triangular,

$$d(x', y') \leq d(x', x) + d(x, y) + d(y, y').$$

Por lo tanto, por simetría,

$$|d(x',y')-d(x,y)|\le d(x',x)+d(y,y')=d'((x',y'),(x,y)),$$

como queremos

Example 2.12. Si la métrica de $\mathbb{R}^p$ proviene de una norma $\| \; \|$ arbitraria y la métrica de $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$ proviene de la norma $\| \; \|_1$ (donde identificamos $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$ con $\mathbb{R}^{m+n}$ de la manera obvia), entonces toda transformación bilineal $\varphi\colon \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ es continua. En efecto,

$$\|\varphi(x,y)\|=\left\|\varphi\left(\sum_{i=1}^m x_ie_i,\sum_{j=1}^n x_jf_j\right)\right\|\le\sum_{i=1,j=1}^{m,n}|x_i||y_j|\|\varphi(e_i,f_j)\|\le A\sum_{i=1}^m|x_i|\sum_{j=1}^n|y_j|=A\|x\|_1\|y\|_1,$$

donde $x=(x_1,\dots,x_m)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$, $\{e_1,\dots,e_m\}$ y $\{f_1,\dots,f_n\}$ denotan a las bases canónicas de $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$, respectivamente, y $A\coloneqq\max\{\|\varphi(e_i,f_j)\|\}$. Así

$$\begin{aligned}d(\varphi(x,y),\varphi(x',y'))&=\|\varphi(x,y)-\varphi(x',y')\|\\&=\|\varphi(x,y-y')+\varphi(x-x',y')\|\\&\le\|\varphi(x,y-y')\|+\|\varphi(x-x',y')\|\\&\le A(\|x\|_1\|y-y'\|_1+\|x-x'\|_1\|y'\|_1).\end{aligned}$$

Si fijamos ahora (x,y) y tomamos (x',y') en $\mathrm{B}_1(x,y)$, entonces $\|y'\|_1\le\|(x',y')\|_1\le\|(x,y)\|_1+1$ y $\|x\|_1\le\|(x,y)\|_1$. Por lo tanto

$$d(\varphi(x,y),\varphi(x',y'))\le AC(\|y-y'\|_1+\|x-x'\|_1)=AC\|(x,y)-(x',y')\|_1=ACd_1((x,y),(x',y')),$$

donde $C=\|(x,y)\|_1+1$. Notemos que esta desigualdad vale para todo $(x,x),(x',y')\in\mathrm{B}_C(0)$. Por lo tanto la restricción de φ a un conjunto acotado es Lipschitziana. Este ejemplo contiene como casos particulares a

- La acción $\varphi\colon\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ de un escalar sobre un vector, definida por $\varphi(\lambda,x)\coloneqq\lambda x$.
- El producto interno canónico $\xi\colon\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, definida por $\xi(x,y)\coloneqq\sum x_iy_i$.
- El producto de matrices $\varphi\colon\mathbb{R}^{mn}\times\mathbb{R}^{np}\to\mathbb{R}^{mp}$, definida por $\varphi(C,D)\coloneqq CD$.

Remark 2.13. Por supuesto que en el ejemplo anterior la norma $\| \; \|_1$ de $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$ puede ser reemplazada por cualquier norma equivalente a ella (esto se sigue del Remark 2.3).

Example 2.14. La función $\mathrm{Inv}\colon\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definida por $\mathrm{Inv}(x)\coloneqq x^{-1}$ es continua en todo punto a de su dominio. En efecto, dado $\epsilon>0$ tomemos $\delta<\min\{|a|/2,\epsilon/2|a|^2\}$. Entonces $|x|>|a|/2$ para todo x tal que $|x-a|<\delta$ (pues $|a|-|x|\le|a-x|<\delta$ y, por lo tanto, $|x|>|a|-\delta>|a|-|a|/2=|a|/2)$. En consecuencia

$$\left\|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right\|=\left\|\frac{a-x}{ax}\right\|\le\frac{2|a-x|}{|a|^2}<\epsilon.$$

Theorem 2.15. *Consideremos subconjuntos X de $\mathbb{R}^m$ e Y de $\mathbb{R}^n$, y funciones $f\colon X\to\mathbb{R}^n$ y $g\colon Y\to\mathbb{R}^p$ tales que $f(X)\subseteq Y$. Si f es continua en a y g es continua en $f(a)$, entonces $g\circ f$ es continua en a.*

Proof. Tomemos un entorno U de $g(f(a))$. Por la Proposición 2.2 existe un entorno V de $f(a)$ tal que $g(Y\cap V)\subseteq U$. Por la misma proposición existe un entorno W de a, tal que $f(X\cap W)\subseteq V$. Por lo tanto $g(f(W))\subseteq g(f(X)\cap V)\subseteq g(Y\cap V)\subseteq U$. Así, nuevamente por la Proposición 2.2, la función $g\circ f$ es continua en a. □

Consideremos un subconjunto X de $\mathbb{R}^m$. Dada una función $f\colon X\to\mathbb{R}^n$ quedan definidas funciones $f_i\colon X\to\mathbb{R}$, donde $1\le i\le n$, por $f_i\coloneqq\pi_i\circ f$. Estas funciones f_i son llamadas las coordenadas de f. Para cada $x\in X$, tenemos que $f(x)=(f_1(x),\dots,f_n(x))$.

Theorem 2.16. *Consideremos un subconjunto X de $\mathbb{R}^m$ y una función $f\colon X \to \mathbb{R}^n$. Supongamos que $\mathbb{R}^n$ está provisto por la métrica inducida por la norma $\| \|_\infty$ (o por cualquier norma equivalente a ella). Entonces $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ es continua en a si y sólo si sus coordenadas lo son.*

Proof. Por los Ejemplos 2.5 y 2.8 sabemos que las proyecciones π_i son continuas. En consecuencia, debido al Teorema 2.15, si f es continua en a, también las coordenadas f_i, de f, lo son. Supongamos ahora que las coordenadas f_i de f son continuas en a. Tomemos $\epsilon > 0$. Por hipótesis, para cada $1 \le i \le n$, existe $\delta_i > 0$ tal que $|f_i(x) - f_i(a)| < \epsilon$ para todo $x \in X \cap B_{\delta_i}(a)$. Como

$$f(x) - f(a) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) - (f_1(a), \dots, f_n(a)) = (f_1(x) - f_1(a), \dots, f_n(x) - f_n(a)),$$

se sigue de esto que $\|f(x) - f(a)\|_\infty < \epsilon$ para todo $x \in X \cap B_\delta(a)$, donde $\delta := \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$. □

Corollary 2.17. *Consideremos un subconjunto X de $\mathbb{R}^m$ y funciones $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ y $f\colon X \to \mathbb{R}^p$. Supongamos que $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ están provistos por la métrica inducida por la norma $\| \|_\infty$ (o por cualquier norma equivalente a ella). Entonces f y g son continuas en a si y sólo si la función $(f,g)\colon X \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, definida por $(f,g)(x) := (f(x), g(x))$, lo es.*

Proof. Por el teorema anterior. □

Theorem 2.18. *Consideremos un subconjunto X de $\mathbb{R}^m$ y un punto $a \in X$. Supongamos que $\mathbb{R}^n$ está provisto de la métrica inducida por la norma $\| \|_\infty$ (o por cualquier norma equivalente a ella). La siguientes afirmaciones valen:*

(1) *Si $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ y $g\colon X \to \mathbb{R}^n$ son continuas en a, entonces $f+g$ también lo es.*
(2) *Si $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ y $\lambda\colon X \to \mathbb{R}$ son continuas en a, entonces λf también lo es.*
(3) *Si $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ y $g\colon X \to \mathbb{R}^n$ son continuas en a, entonces la función $\langle f,g\rangle\colon X \to \mathbb{R}$, definida por $\langle f,g\rangle(x) := \langle f(x), g(x)\rangle = \sum_{i=1}^n f_i(x) g_i(x)$ también lo es.*
(4) *Si $f\colon X \to \mathbb{R}$ es continua en a y $f(a) \ne 0$, entonces la función $f^{-1}\colon Y \to \mathbb{R}$, definida por $f^{-1}(x) := f(x)^{-1}$, donde $Y := \{x \in X : f(x) \ne 0\}$, es continua en a.*

Proof. Consideremos las funciones

$$s\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \varphi\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \xi\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \mathrm{Inv}\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

definidas por $s(x,y) := x + y$, $\varphi(\lambda, x) := \lambda x$, $\xi(x,y) := \langle x, y\rangle = \sum x_i y_i$ e $\mathrm{Inv}(x) := x^{-1}$, respectivamente. Como estas funciones son continuas y las funciones

$$(f,g)\colon X \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \qquad \text{y} \qquad (\lambda, f)\colon X \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

son continuas en a, entonces también las funciones

$$f + g = s \circ (f,g), \quad \lambda f = \varphi \circ (\lambda, f), \quad \langle f, g\rangle = \xi \circ (f,g) \quad \text{y} \quad f^{-1} = \mathrm{Inv} \circ f,$$

lo son. □

Theorem 2.19. *Si X es compacto y $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ es continua, entonces $f(X)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$.*

Proof. Si $(U_i)_{i\in I}$ es un cubrimiento abierto de $f(X)$, entonces $\big(f^{-1}(U_i)\big)_{i\in I}$ es un cubrimiento abierto de X. Como X es compacto, existen $i_1, \dots, i_n \in I$ tales que $X \subseteq f^{-1}(U_1) \cup \dots \cup f^{-1}(U_i)$. Por lo tanto,

$$f(X) \subseteq f\big(f^{-1}(U_1) \cup \dots \cup f^{-1}(U_i)\big) = f\big(f^{-1}(U_1)\big) \cup \dots \cup f\big(f^{-1}(U_i)\big) \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_n,$$

lo que muestra que $f(X)$ es compacto. □

Una de las propiedades más importantes de los intervalos cerrados y acotados de números reales es que, como afirma el Teorema de Bolzano, toda función real continua definida sobre uno de ellos tiene un máximo y un mínimo globales. Los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^m$ tienen la misma propiedad. En efecto, si X es compacto y $f\colon X \to \mathbb{R}$ es continua, entonces, por el teorema anterior, su imagen $f(X)$ es un subconjunto compacto y, por lo tanto, cerrado y acotado de $\mathbb{R}$. Así, existen x_0 y x_1 en X tales que $f(x_0) = \inf(f(X))$ y $f(x_1) = \sup(f(X))$.

Corollary 2.20. *Si X es compacto y $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ es continua, entonces f es cerrada (es decir que si $Y \subseteq X$ es cerrado, entonces $f(Y) \subseteq \mathbb{R}^n$ también lo es).*

Proof. Como es un cerrado de X, el conjunto Y es compacto. En consecuencia, por el teorema anterior, $f(Y)$ es compacto y, por lo tanto, un cerrado de $\mathbb{R}^n$. □

Fijemos $m, n \in \mathbb{N}$ y consideremos a $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ provistos de métricas que denotaremos con d. Consideremos una función $f\colon X \to \mathbb{R}^n$, definida en un subconjunto X de $\mathbb{R}^m$. Decimos que f es *uniformemente continua* si, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que

$$d(f(x), f(y)) < \epsilon \text{ para todo } x, y \in X \text{ tal que } d(x, y) < \delta.$$

Decimos que f es *uniformemente continua sobre un subconjunto Y de X* si su restricción a Y es uniformemente continua.

La diferencia entre las definiciones de continuidad y de continuidad uniforme, es que en la primera δ puede variar con el punto del dominio en el que se está evaluando la continuidad, no exigiéndose que se haya uno que sirva para todos, mientras que en la segunda esto se pide explícitamente.

Remark 2.21. Si las métricas de $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ que estamos usando provienen de normas, entonces podemos reemplazarlas por normas equivalentes a ellas, sin que varíe el conjunto de funciones que son uniformemente continuas.

Remark 2.22. Consideremos una función $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ y un subconjunto Y de X. Si f es uniformemente continua sobre Y, entonces $f_{|Y}$ es continua. En particular toda función uniformemente continua es continua.

Example 2.23. Toda función Lipschitziana es uniformemente continua. Esto incluye los Ejemplos 2.7, 2.8, 2.10 y 2.11.

Remark 2.24. Hay funciones que son continuas y no son uniformemente continuas. Una es la función $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) \coloneqq 1/x$. Ya vimos en el Ejemplo 2.14 que es continua, pero no es uniformemente continua porque para todo $\delta \in (0, 1)$,

$$|f(\delta) - f(\delta/2)| = \left| \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta/2} \right| = \frac{\delta/2}{\delta^2/2} = \frac{1}{\delta} > 1.$$

Theorem 2.25. *Consideremos subconjuntos X de $\mathbb{R}^m$ y Y de $\mathbb{R}^n$, y funciones $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ y $g\colon Y \to \mathbb{R}^p$ tales que $f(X) \subseteq Y$. Si f y g son uniformemente continuas, entonces $g \circ f$ también lo es.*

Proof. Como g es uniformemente continua, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $y, y' \in Y$,

$$d\big(g(y), g(y')\big) < \epsilon \quad \text{siempre que } d(y, y') < \delta.$$

Puesto que también f es uniformemente continua, existe $\delta' > 0$ tal que para todo $x, x' \in X$,

$$d\big(f(x), f(x')\big) < \delta \quad \text{siempre que } d(x, x') < \delta'.$$

Combinando ambos hechos obtenemos que

$$d\big(g(f(x)), g(f(x'))\big) < \epsilon \quad \text{siempre que } d(x, x') < \delta',$$

lo que termina la demostración. $\square$

Proposition 2.26. *Supongamos que $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ están provistos de las métricas inducidas por $\|\ \|_\infty$ (o por cualquier métrica equivalente a ella). Consideremos un subconjunto X de $\mathbb{R}^m$ y funciones $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ y $g\colon X \to \mathbb{R}^p$. Entonces f y g son uniformemente continuas si y sólo si la función $(f,g)\colon X \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ lo es.*

Proof. Como

$$d_\infty\big((f,g)(x),(f,g)(x')\big) = \max\big(d_\infty\big(f(x),f(x')\big), d_\infty\big(g(x),g(x')\big)\big),$$

son equivalentes:

- Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x,x') < \delta \Rightarrow d_\infty\big(f(x),g(x')\big) < \epsilon \text{ y } d_\infty\big(f(x),g(x')\big) < \epsilon \quad \text{para todo } x,x' \in X.$$

- Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x,x') < \delta \Rightarrow d_\infty\big((f,g)(x),(f,g)(x')\big) < \epsilon \quad \text{para todo } x,x' \in X.$$

Esto prueba que la afirmación es verdadera, porque el primer item se satisface si y solo si f y g son uniformemente continuas, y el segundo dice que (f,g) es uniformemente continua. $\square$

Theorem 2.27. *Consideremos un subconjunto X de $\mathbb{R}^m$ y supongamos que $\mathbb{R}^n$ está provisto por la métrica inducida por la norma $\|\ \|_\infty$ (o por cualquier norma equivalente a ella). La siguientes afirmaciones valen:*

(1) *Si $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ y $g\colon X \to \mathbb{R}^n$ son uniformemente continuas, entonces $f+g$ también lo es.*
(2) *Si $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ y $\lambda\colon X \to \mathbb{R}$ son uniformemente continuas y acotadas, entonces λf es uniformemente continua.*
(3) *Si $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ y $g\colon X \to \mathbb{R}^n$ son uniformemente continuas y acotadas, entonces la función $\langle f,g\rangle\colon X \to \mathbb{R}$, definida por $\langle f,g\rangle(x) := \langle f(x),g(x)\rangle = \sum_{i=1}^n f_i(x)g_i(x)$ es uniformemente continua.*

Proof. (1) Por los Ejemplos 2.5 y 2.9 la función $s\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definida por $s(x,y) := x+y$, es uniformemente continua. Por otro lado, debido a la Proposición 2.26, también lo es la función $(f,g)\colon X \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. En consecuencia, por el Teorema 2.25 la función $f+g = s\circ(f,g)$ es uniformemente continua.

(2) Ya sabemos que la función $(\lambda,f)\colon X \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ es uniformemente continua. Además es acotada pues λ y f lo son. Por otro lado, debido al Ejemplo 2.12 la función $\varphi\colon \operatorname{Im}(\lambda,f) \to \mathbb{R}^n$, definida por $\varphi(\lambda,x) := \lambda x$ es uniformemente continua. En consecuencia, debido al Teorema 2.25, la función $\lambda f = \varphi\circ(\lambda,f)$ es uniformemente continua.

(3) Ya sabemos que la función $(f,g)\colon X \to \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ es uniformemente continua. Además es acotada pues f y g lo son. Por otro lado, debido al Ejemplo 2.12 la función $\xi\colon \operatorname{Im}(f,g) \to \mathbb{R}$, definida por $\xi(x,y) := \langle x,y\rangle = \sum x_i y_i$, es uniformemente continua. En consecuencia, debido al Teorema 2.25, la función $\langle f,g\rangle = \xi\circ(f,g)$ es uniformemente continua. $\square$

Theorem 2.28. *Consideremos un subconjunto X de $\mathbb{R}^m$ y una función $f\colon X \to \mathbb{R}^n$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *f es uniformemente continua.*
(2) *Si $(x_r)_{r\in\mathbb{N}}$ e $(y_r)_{r\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de puntos de X tales que $\lim_{r\to\infty} d(x_r,y_r) = 0$, entonces $\lim_{r\to\infty} d(f(x_r),f(y_r)) = 0$.*

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2) Tomemos $\epsilon > 0$ arbitrario. Por hipótesis existe $\delta > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) < \epsilon$, para todo $x, y \in X$ tales que $d(x, y) < \delta$. Por otro lado existe $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_r, y_r) < \delta$ para todo $r \geq r_0$. Por lo tanto $d(f(x_r), f(y_r)) < \epsilon$ para todo $r \geq r_0$. Así $\lim_{r\to\infty} d(f(x_r), f(y_r)) = 0$, por definición.

(2) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que f no es uniformemente continua. Por definición esto significa que existe $\epsilon > 0$ que satisface la propiedad de que, para cada $r \in \mathbb{N}$, podemos encontrar x_r e y_r en X, tales que $d(x_r, y_r) < 1/r$ y $d(f(x_r), f(y_r)) \geq \epsilon$. Asi obtenemos sucesiones $(x_r)_{r\in\mathbb{N}}$ e $(y_r)_{r\in\mathbb{N}}$, de puntos de X, tales que $\lim_{r\to\infty} d(x_r, y_r) = 0$, pero $d(f(x_r), f(y_r))$ no converge a 0. □

Example 2.29. La función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) \coloneqq x^2$ no es uniformemente continua. En efecto, para ver esto consideremos las sucesiones $(x_r)_{r\in\mathbb{N}}$ e $(y_r)_{r\in\mathbb{N}}$, definidas por $x_r \coloneqq \sqrt{r+1}$ e $y_r \coloneqq \sqrt{r}$. Entonces

$$x_r^2 - y_r^2 = 1 \quad \text{y} \quad x_r - y_r = \frac{(x_r - y_r)(x_r + y_r)}{x_r + y_r} = \frac{x_r^2 - y_r^2}{x_r + y_r} = \frac{1}{\sqrt{r+1} + \sqrt{r}},$$

de modo que $\lim |x_r - y_r| = 0$, pero $\lim |x_r^2 - y_r^2| = 1$. Por lo tanto, debido al teorema anterior, f no es uniformemente continua. Este ejemplo muestra también que en el item (2) del Teorema 2.27 la hipótesis sobre la acotación de las funciones λ y f no puede ser eliminada impunemente.

Example 2.30. La función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) \coloneqq \cos x^2$ no es uniformemente continua. En efecto, consideremos las sucesiones $(x_r)_{r\in\mathbb{N}}$ e $(y_r)_{r\in\mathbb{N}}$, definidas por $x_r \coloneqq \sqrt{(r+1)\pi}$ e $y_r \coloneqq \sqrt{r\pi}$. Entonces

$$x_r - y_r = \frac{(x_r - y_r)(x_r + y_r)}{x_r + y_r} = \frac{x_r^2 - y_r^2}{x_r + y_r} = \frac{(r+1)\pi - r\pi}{\sqrt{(r+1)\pi} + \sqrt{r\pi}} = \frac{\pi}{\sqrt{(r+1)\pi} + \sqrt{r\pi}}$$

y

$$\cos x_r^2 - \cos y_r^2 = \cos(r+1)\pi - \cos r\pi = (-1)^{r+1} - (-1)^r = (-1)^{r+1} 2,$$

de modo que $\lim |x_r - y_r| = 0$, pero $\lim |\cos x_r^2 - \cos y_r^2|$ no existe. Por lo tanto, debido al teorema anterior, f no es uniformemente continua.

Theorem 2.31. *Toda función continua $f\colon K \to \mathbb{R}^n$, definida sobre un compacto $K \subseteq \mathbb{R}^m$, es uniformemente continua.*

Proof. Supongamos que la función f no es uniformemente continua. Por definición esto significa que existe $\epsilon > 0$ que satisface la propiedad de que, para cada $r \in \mathbb{N}$, podemos encontrar x_r e y_r en X, tales que

$$d(x_r, y_r) < 1/r \quad \text{y} \quad d(f(x_r), f(y_r)) \geq \epsilon. \tag{2.2}$$

Como K es compacto existe una subsucesión $(x_{r_i})_{i\in\mathbb{N}}$, de puntos de K, que converge a un punto x de K. Como $d(x_{r_i}, y_{r_i}) < 1/r_i$, también $(y_{r_i})_{i\in\mathbb{N}}$ tiende a x. Dado que f es continua, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(f(x_{r_i}), f(x)) < \epsilon/2$ y $d(f(y_{r_i}), f(x)) < \epsilon/2$, para todo $i \geq i_0$. Por lo tanto

$$d(f(x_{r_i}), f(y_{r_i})) \leq d(f(x_{r_i}), f(x)) + d(f(y_{r_i}), f(x)) < \epsilon \quad \text{para todo } i \geq i_0$$

lo cual se contradice con la segunda desigualdad de (2.2). Esta contradicción muestra que f es uniformemente continua. □

3 Convergencia uniforme

Consideremos a $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ provistos de métricas que denotaremos con d y fijemos un subconjunto X de $\mathbb{R}^m$. denotemos con $\mathrm{Fun}(X, \mathbb{R}^n)$ al conjunto de funciones de X en $\mathbb{R}^n$. Una sucesión $(f_r)_{r\in\mathbb{N}}$

de funciones es una función de $\mathbb{N}$ en $\mathrm{Fun}(X, \mathbb{R}^n)$. Decimos que $(f_r)_{r\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a una función $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ si, para cada $x \in X$ fijado y cada $\epsilon > 0$, existe $r_x \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f_r(x), f(x)) < \epsilon \qquad \text{para todo } r \geq r_x.$$

Es decir si, para cada $x \in X$, la sucesión $(f_r(x))_{r\in\mathbb{N}}$, de puntos de $\mathbb{R}^n$, converge a $f(x)$.

Example 3.1. La sucesión de funciones $f_r\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definidas por $f_r(x) \coloneqq x^r$ converge a la función $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ para $0 \leq x < 1$ y $f(1) = 1$.

Example 3.2. La sucesión de funciones $g_r\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definidas por $g_r(x) \coloneqq x^r(1-x^r)$ converge a la función nula.

Notemos que en la convergencia puntual el número n_x en general no puede ser elegido de modo de que sea independiente de x. Cuando esto puede hacerse decimos que la convergencia es uniforme. Concretamente una sucesión $(f_r)_{r\in\mathbb{N}}$, de funciones $f_r\colon X \to \mathbb{R}^n$, *converge uniformemente* a una función $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ si para todo $\epsilon > 0$, existe $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f_r(x), f(x)) < \epsilon \qquad \text{para todo } r \geq r_0 \text{ y todo } x \in X. \tag{3.3}$$

Remark 3.3. En los ejemplos 3.1 y 3.2 la convergencia no es uniforme. En el segundo ejemplo esto es evidente porque $g_r\big(\sqrt[r]{1/2}\big) = 1/4$ y, así, para ningún $\epsilon < 1/4$ se satisface la condición 3.3. Veamos el primer ejemplo. Fijemos $\epsilon < 1$ arbitrario. Cualquiera sea $r_0 \in \mathbb{N}$ existen puntos x en $[0,1)$ tales que $x^{r_0} = |f_{r_0}(x) - f(x)| \geq \epsilon$. En efecto esto es evidente porque $\lim_{x\to 1} f_{r_0}(x) = 1$. Por lo tanto la condición 3.3 no se satisface para ningún $\epsilon < 1$.

Example 3.4. Los argumentos de la nota anterior no sólo prueban que en los ejemplos 3.1 y 3.2 la convergencia no es uniforme, sino que prueban también que esto ocurre aunque el dominio de definición de las funciones involucradas se restringa de $[0,1]$ a $[0,1)$. Veamos que, para cada $0 < \delta < 1$ fijo, la sucesión de funciones $f_r\colon [0,\delta] \to \mathbb{R}$, definidas por $f_r(x) \coloneqq x^r$, converge uniformemente a la función nula. En efecto, esto se sigue facilmente de que $x^r \leq \delta^r$ para todo $x \in [0,\delta]$ y de que $\lim_{r\to\infty} \delta^r = 0$. También la sucesión de funciones $g_r\colon [0,\delta] \to \mathbb{R}$, definidas por $g_r(x) \coloneqq x^r(1-x^r)$, converge uniformemente a la función nula, para cada $0 < \delta < 1$ fijo, pues $x^r(1-x^r) < x^r \leq \delta^r$ para todo $x \in [0,\delta]$.

Theorem 3.5. *Supogamos que la sucesión de funciones $f_r\colon X \to \mathbb{R}^n$ converge uniformemente a una función $f\colon X \to \mathbb{R}^n$. Si las f_r son continuas en un punto $a \in X$, entonces f es continua en a.*

Proof. Tomemos $\epsilon > 0$ arbitrario. Por la definición de convergencia uniforme existe $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(f_r(x), f(x)) < \epsilon/3$ para todo $r \geq r_0$ y todo $x \in X$. Por otra parte, dado que f_{r_0} es continua en a, existe $\delta > 0$ tal que $d(f_{r_0}(x), f_{r_0}(a)) < \epsilon/3$ para todo $x \in X$ tal que $d(x,a) < \delta$. En consecuencia

$$d(f(x), f(a)) \leq d(f(x), f_{r_0}(x)) + d(f_{r_0}(x), f_{r_0}(a)) + d(f_{r_0}(a), f(a)) < e$$

para todo $x \in X$ tal que $d(x,a) < \delta$. $\square$